الإحداثيات القطبية:

بفرض أن (r, θ) هي الإحداثيات ~~القطبية~~ القطبية

لنقطة (x, y) عندئذٍ $y = r.\sin\theta$ (2) $x = r.\cos\theta$ (1)

ومنه نجد أن $r^2 = x^2 + y^2$

$r = |Z|$ أي أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

وبقسمة (2) على (1) نجد أن $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$

ندعو العدد الحقيقي الموجب r طويلة العدد العقدي وهو عبارة عن قيمة وحيدة أما θ فندعوها مطفونة (سعة) العدد العقدي Z و θ تأخذ عدد غير منته من القيم المختلفة بعضها عن بعض بمضاعفات صحيحة للعدد 2π

ونرمز لمطفونة العدد العقدي Z بالرمز $\arg Z = \theta$

ومن بين هذه القيم هناك قيمة واحدة فقط ندعوها القيمة الأساسية لمطفونة العدد العقدي ونرمز لها بالرمز $\operatorname{Arg} Z$ ومنه فإن $\arg Z = \operatorname{Arg} Z + 2n\pi$

حيث $n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots$ وأخيراً العدد العقدي Z يكتب بالصورة القطبية على الشكل

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ملاحظة هامة:

لتعيين القيمة الأساسية لمطفونة العدد العقدي Z نستخدم العلاقة $\tan\theta = \frac{y}{x}$

ونوجد حلول المعادلة $\tan\theta = \tan\varphi$

$$\theta = \varphi + \pi k$$

وقبل أن نحدد القيمة الأساسية ننظر إلى موقع النقطة المناظرة للعدد العقدي في أي ربع من أرباع المستوي العقدي تقع.

Ex: اكتب العدد العقدي $Z = -1 - i$ بالشكل القطبي « النقطة تقع في R_3 »

$x = -1$, $y = 1$ ؛ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

ونعلم أن $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{+1}{-1} = 1$

$$\Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \; ; n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots$$

تذكرة: $\tan\theta = \tan y \Leftarrow \theta = y + n\pi$ ، $n \in \mathbb{Z}$

ملاحظة: القيمة الأساسية لسعة العدد المعقد Z تحقق المتراجحة

$-\pi < Arg\ z \leqslant \pi$ من أجل $n=-1$، $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ وبما أن $-\pi < -\frac{3\pi}{4} \leqslant \pi$

فعندئذٍ $-\frac{3\pi}{4}$ هي القيمة الأساسية لسعة العدد المعقد $-1-i$ أي أن

$$\arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$$

وبالتالي فإن الشكل القطبي للعدد المعقد

$$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] \quad n=0$$

أو

$$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \quad n=1$$

ملاحظة هامة: 1] لإيجاد القيمة الأساسية لسعة العدد المعقد $Z = x+iy$ نوجد أولاً حلول المعادلة $\tan\theta = \frac{y}{x}$ بعد إيجاد حلول المعادلة نختار قيمة لـ n بحيث تقع الزاوية θ في الربع الذي يوجد فيه العدد المعقد.

2] ليس لعدد المعقد الصفري تمثيل قطبي ونستنتج ذلك من العلاقة

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{عدم تعيين}$$

مبرهنة -1-

إذا كان $Z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$, $Z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

عندئذٍ $Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin\theta(\theta_1+\theta_2)]$

من هذه المبرهنة نستنتج أن جداء عددين عقديين بالشكل القطبي هو عدد عقدي طويلته تساوي جداء الطويلتين أي أن $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$

أما سعة الجداء فيعطى بالعلاقة

$$(*) \quad \arg(Z_1 . Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$$

إن العلاقة الأخيرة هي عبارة عن مساواة بين مجموعات لكن نفهمها بالشكل الآتي:

أي قيمة من قيم $\arg(Z_1.Z_2)$ يمكن التعبير عنها كمجموع قيمتين إحداهما من قيم $\arg Z_1$ والثانية من قيم $\arg Z_2$

لنثبت الآن صحة المبرهنة:

$$z_1 . z_2 = r_1 [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1] . r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$
$$= r_1 . r_2 [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1].[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$
$$= r_1 . r_2 [\cos\theta_1 . \cos\theta_2 - \sin\theta_1 . \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1 . \cos\theta_2$$
$$+ \cos\theta_1 . \sin\theta_2)]$$
$$= r_1 . r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Ex: توضيح للعلاقة (*)

ليكن $z_1 = 4$ ، $z_2 = -1$ عندئذ $z_1 . z_2 = -i$

$$\arg(z_1 . z_2) = \arg(-i)$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{2} \qquad -\pi < -\frac{\pi}{2} \leq \pi$$
$$\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots$$

$$\arg z_1 = \arg i$$
$$\tan\theta_1 = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\arg z_2 = \arg(-1)$$
$$\tan\theta_2 = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$$

ومن أجل $n=1$ تكون $Arg(-1) = \pi$

$$\arg(-1) = \pi + 2n\pi$$

ومن أجل $n=1$ تكون $\arg(z_1 . z_2) = \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$

ومن أجل $n=-2$ تكون $\arg(z_2) = \arg(-1) = \pi - 4\pi = -3\pi$

ومن أجل $n=2$ تكون $\arg(z_1) = \arg(i) = \frac{9\pi}{2}$

ومنه تحقق العلاقة.

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} - 3\pi = \frac{9\pi}{2} - \frac{6\pi}{2}$$

مبرهنة -2-.

إذا كان $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ ، $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

عندئذٍ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

من هذه المبرهنة نستنتج أنه ناتج قسمة عددين عقديين بالشكل القطبي هو عدد عقدي طويلته تساوي $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ وإما مغنوته $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

ملاحظة: هذه المساواة عبارة عن مساواة بين مجموعات ولكن نفهمها كما يلي أي قيمة من قيم العدد العقدي $\frac{z_1}{z_2}$ يمكن التعبير عنها كفرق قيمتين أحداهما من قيم مغنوت العدد العقدي z_1 والثانية من قيم مغنوت العدد العقدي z_2

الإثبات:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]}{r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1] \cdot [\cos\theta_2 - i\sin\theta_2]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 \; (=1)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1] \cdot [\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

من المبرهنة الأخيرة نستنتج أنه

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos\theta - i\sin\theta]$$

وهو المعكوس الضربي للعدد العقدي $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ بالصورة القطبية

$$Z \cdot Z^{-1} = r[\cos\theta + i\sin\theta] \cdot \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$
$$= 1[1 + i0] = 1$$

- إذا رمزنا للعدد العقدي $\cos\theta + i\sin\theta$ بالشكل $e^{i\theta}$ أي إذا كان $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ وهذه العلاقة تعرف بعلاقة أولر

عندئذٍ
$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (1)$$

في الساحة العقدية ضرب القوى جمع الأس

* لإثبات صحة المساواة (1) نفرض أن:

$$Z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$$
$$Z_2 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_2$$

عندئذٍ حسب أولر فإن $Z_1 = e^{i\theta_1}$ ، $Z_2 = e^{i\theta_2}$

لكن استناداً على المبرهنة الأولى نجد أن

$$Z_1 \cdot Z_2 = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

وبالاعتماد على صيغة أولر يكون $Z_1 \cdot Z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

أي أن $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

كذلك الأمر نجد أن

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

نمكن إثبات صحة هذه المساواة بنفس الخطوات السابقة لكن اعتماداً على المبرهنة -2-

من هذه العلاقة نستنتج أن المعكوس الضربي للعدد العقدي $e^{i\theta}$ هو $e^{-i\theta}$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

إذا كان $Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ عندئذٍ بالاستناد على صيغة أولر يكون $Z = re^{i\theta}$ وبناءً على ماتقدم نجد أن

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

وأخيراً $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ وهو المعكوس الضربي للعدد العقدي بالشكل الأسي.

قوى وجذور العدد العقدي:

ليكن $z = re^{i\theta}$ عندئذٍ:

(1) $z^n = r^n e^{in\theta}$, $\forall n = 0, \mp1, \mp2 \dots$

لنثبت صحة هذه العلاقة عندما $n = 1, 2 \dots$ وذلك بطريقة الاستنتاج الرياضي

من أجل $n = 1$ يكون $z = re^{i\theta}$ والعلاقة صحيحة

ولنفرض أنها صحيحة من أجل n أي لدينا العلاقة الصحيحة $z^n = r^n e^{in\theta}$

ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ أي لنثبت صحة العلاقة $z^{n+1} = r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$

$$z^{n+1} = z^n . z^1 = r^n . e^{in\theta} . re^{i\theta} = r^n . r . e^{in\theta} . e^{i\theta}$$
$$= r^{n+1} . e^{i(n+1)\theta}$$

إذا اصطلحنا على أن $z^0 = 1$ فإن العلاقة (1) تكون صحيحة.

لنثبت صحة العلاقة (1) من أجل $n = -1, -2, \dots$

$$z^n = (z^{-1})^{-n} = (\frac{1}{r} e^{-i\theta})^{-n} = (r^{-1} . e^{-i\theta})^{-n}$$

وبما أن n سالبة فإن $-n$ موجبة وبالاستفادة من الخطوة الأولى من البرهان يكون

$$z^n = (r^{-1})^{-n} (e^{-i\theta})^{-n} = r^n . e^{in\theta}$$

عندما $z = e^{i\theta}$ عندئذٍ يكون $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

وبالتالي وبالاستفادة من صيغة أولر يكون

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

وهذه العلاقة تعرف بعلاقة ديموافر

Ex: أوجد ناتج $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^6$

لإيجاد الناتج نكتب العلاقة بالشكل ديموافر

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

	∴	1	2	3	4
	∴	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	∴	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \implies \theta = -\frac{\pi}{3} + K\pi$$

ومنه من أجل $K=0$ يكون $Arg(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$; $-\pi < \frac{\pi}{3} \leq \pi$

$$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^6 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^6 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}$$

$$= 1 + i0 = 1$$

Ex: أوجد قيمة $(1+i)^8$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^8$$

$$= 16[\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = 16$$

$$[(1+i)^2]^4 = (2i)^4 = [(2i)^2]^2 = (-4)^2 = 16$$